MỘT SỐ TÍNH CHẤT MỞ RỘNG CỦA CĂN IĐÊAN

Lê Quang Huy[1], Hoàng Thị Minh Nhàn[2]

TÓM TẮT

Bài báo mở rộng một số tính chất của các phép toán: tổng, tích và giao qua phép lấy căn.

Từ khóa: *Vành, iđêan, căn của iđêan.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong bài báo này, ta luôn giả thiết (R, +, .) là vành giao hoán, có đơn vị và I là một iđêan của R.

Bổ đề và định nghĩa 1.1. Cho I là một iđêan của vành R. Kí hiệu: $\sqrt{I} = \{ x \in R \mid \exists n \in \boldsymbol{N}: x^n \in I \}$. Khi đó $\sqrt{I}$ là một iđêan của R và iđêan này gọi là *căn* của iđêan I.

Chứng minh.

i) Ta có $0 \in \sqrt{I}$ nên $\sqrt{I} \neq \emptyset$.

ii) Lấy $a, b \in \sqrt{I}$, tồn tại n_1, n_2 sao cho $a^{n_1} \in I$ và $b^{n_2} \in$ I. Chọn $n = n_1 + n_2 - 1$, ta có $(a-b)^{n_1+n_2+1} \in I$, suy ra a - $b \in \sqrt{I}$.

iii) Với mọi $a \in \sqrt{I}$ và $x \in R$. Do $a \in \sqrt{I}$ nên tồn tại n sao cho $a^n \in I$. Suy ra $(ax)^n = a^n x^n \in I$ (vì $a^n \in I$), nghĩa là $ax \in \sqrt{I}$.

Vậy $\sqrt{I}$ là một iđêan của vành R.

Iđêan $\sqrt{I}$ là một iđêan được xây dựng từ iđêan I, khái niệm và một số tính chất của nó được trình bày trong [1], [2], [3] và [4]. Căn của iđêan có nhiều ứng dụng trong đại số giao hoán, do đó vấn đề tự nhiên được nhiều người quan tâm là mối quan hệ giữa I và $\sqrt{I}$ ra sao và phép lấy căn có thể bảo toàn qua những phép toán nào? Trong [2] và [4] đã giới thiệu và đưa một số tính chất của iđêan căn về các vấn đề này, tuy nhiên chưa hệ thống và chưa đầy đủ. Trong bài báo này chúng tôi sẽ trình bày một cách chi tiết khái niệm và tính chất về mối quan hệ giữa I và $\sqrt{I}$ và mở rộng phép lấy căn qua phép tính tổng, tích và giao của một họ các iđêan cho trước.

2. QUAN HỆ GIỮA I VÀ $\sqrt{I}$

Bổ đề 2.1. Cho J là iđêan của R sao cho $J \subseteq I$. Khi đó $J \subseteq \sqrt{I}$.

Chứng minh.

Với mọi $a \in J$, ta lấy $n = 1$, khi đó $a^n \in \mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}$. Suy ra $a \in \sqrt{I}$. Do vậy $I \in \sqrt{I}$.

---

[1] *Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

[2] *Sinh viên Đại học Sư phạm Toán K17A, khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

Hệ quả 2.2. $I \subseteq \sqrt{I}$.

Khi nào đẳng thức $\sqrt{I} = I$ đúng? Sau đây, chúng tôi chỉ ra một số iđêan đặc biệt để đẳng thức $\sqrt{I} = I$ đúng.

Mệnh đề 2.3. $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Chứng minh.

Áp dụng Hệ quả 2.2 ta có $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}}$, do đó ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{\sqrt{I}} \subseteq \sqrt{I}$. Với mọi $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$ thì tồn tại n_1 sao cho $x^{n_1} \in \sqrt{I}$. Suy ra tồn tại n_2 sao cho $(x^{n_1})^{n_2} \in I$. Do đó $x^{n_1 n_2} \in I$. Từ đó ta nhận được $x \in \sqrt{I}$, hay $\sqrt{\sqrt{I}} \subseteq \sqrt{I}$.Vậy $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

Đẳng thức cũng đúng nếu *I* là iđêan nguyên tố.

Bổ đề 2.4. Nếu P là iđêan nguyên tố thì $\sqrt{P} = P$.

Chứng minh.

Theo Hệ quả 2.2. ta có $P \subseteq \sqrt{P}$, do đó ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{P} \subseteq P$. Với mọi $x \in \sqrt{P}$. Nếu $n = 1$. Ta có $x = x^1 \in P$. *Suy ra* $\sqrt{P} \subseteq P$.Nếu $n \geq 2$. Giả sử $x \notin P$. Ta có $x^n = x.x^{n-1} \in P$. Vì P là iđêan nguyên tố nên $x^{n-1} \in P$. Cứ tiếp tục quá trình như vậy ta sẽ nhận được $x \in P$. Điều này mâu thuẫn với giả sử $x \notin P$. Vậy $x \in P$. Suy ra $\sqrt{P} \subseteq P$. Từ đó ta nhận được $\sqrt{P} = P$.

Xét trên vành số nguyên $\boldsymbol{Z}$, ta biết rằng với mỗi số nguyên tố *p*, iđêan $p\boldsymbol{Z}$ là iđêan nguyên tố, do vậy ta có kết quả sau:

Hệ quả 2.5. $\sqrt{q\boldsymbol{Z}} = q\boldsymbol{Z}$.

Kết quả của Hệ quả 2.4 vẫn còn đúng khi thay *q* bằng lũy thừa của *q*. Cụ thể ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.6. Cho *q* là số nguyên tố. Khi đó với mọi số tự nhiên $\alpha \geq 1$ ta có $\sqrt{q^\alpha \mathbf{Z}} = q\mathbf{Z}$.

Chứng minh.

Lấy $x \in \sqrt{q^\alpha \boldsymbol{Z}}$ thì tồn tại $n \in N$ sao cho $x^n \in q^\alpha \boldsymbol{Z}$. Khi đó tồn tại $p \in Z$ sao cho $x^n = q^a.p$. Suy ra $x^n \vdots p^\alpha$. Vì q là số nguyên tố nên $x \vdots q$ hay $x \in q\boldsymbol{Z}$. Vậy $\sqrt{q^\alpha \mathbf{Z}} \subseteq q\mathbf{Z}$.

Lấy $x \in q\mathbf{Z}$, khi đó tồn tại $m \in Z$ sao cho $x = qm$. Chọn $n = \alpha$ ta có $x^n = (qm)^\alpha = q^\alpha.m^\alpha \in q^\alpha Z$. Vậy $q\boldsymbol{Z} \subseteq \sqrt{q^\alpha \boldsymbol{Z}}$.

Nên ta có $\sqrt{q^\alpha \boldsymbol{Z}} = q\boldsymbol{Z}$.

3. SỰ BẢO TOÀN CĂN CỦA IĐÊAN QUA MỘT SỐ PHÉP TOÁN

Trong mục này, chúng tôi chỉ ra iđêan căn bảo toàn qua phép thương, phép nhân, phép giao và phép tổng của các iđêan.

Bổ đề 3.1. Giả sử *I* và *J* là các iđêan của R. Khi đó $\sqrt{I / J} = \sqrt{I} / J$.

Chứng minh.

Lấy $x \in \sqrt{I/J}$ bất kỳ. Khi đó, tồn tại n ∈ N sao cho $x^n \in I/J$. Theo giả thiết ta có $x \in \dfrac{R}{J}$ nên $x = a + J,\ a \in I$. Do đó $x^n = a^n + J \in I/J$. Suy ra $a^n \in \sqrt{I}$. Nghĩa là $\sqrt{I/J} \subseteq \sqrt{I}/J$.

Lấy $x \in \sqrt{I}/J$ bất kỳ. Ta có $x = a + J,\ a \in \sqrt{I}$. Khi đó, tồn tại $n \in N$ sao cho $a^n \in I$. Do đó $x^n = a^n + J \in I/J$. Suy ra $x \in \sqrt{I/J}$. Nghĩa là $\sqrt{I/J} \supseteq \sqrt{I}/J$. Vậy $\sqrt{I/J} = \sqrt{I}/J$.

Bổ đề 3.2. Giả sử $J \subseteq I$. Khi đó $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$.

Chứng minh.

Lấy $x \in \sqrt{J}$ bất kỳ. Khi đó, tồn tại $n \in N$ sao cho $x^n \in J$. Mà theo giả thiết ta có $J \subseteq I$ nên $x^n \in I$. Suy ra $x \in \sqrt{I}$. Vậy $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$.

Từ bổ đề trên ta thấy trong trường hợp $J \subseteq I$ luôn tồn tại iđêan $\sqrt{I}/\sqrt{J}$. Theo Bổ đề 3.1 và kết hợp với Hệ quả 2.5 ta có hệ quả sau:

Hệ quả 3.3. Giả sử P là i đêan nguyên tố sao cho $P \subseteq I$. Khi đó ta có $\sqrt{I/P} \cong \sqrt{I}/\sqrt{P}$

Còn trong trường hợp tổng quát tồn tại một toàn cấu từ $\sqrt{I/J}$ vào $\sqrt{I}/\sqrt{J}$.

Mệnh đề 3.4. Giả sử $J \subseteq I$. Khi đó tồn tại một dãy khớp ngắn

$0 \to \sqrt{J}/J \to \sqrt{I/J} \to \sqrt{I}/\sqrt{J} \to 0.$

Chứng minh.

Theo Bổ đề 3.1, ta có $\sqrt{I/J} = \sqrt{I}/J$. Xét toàn cấu tự nhiên $g : \sqrt{I}/J \to \sqrt{I}/\sqrt{J}$. Khi đó ta có điều phải chứng minh.

Mệnh đề 3.5.

a) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}.$

b) $\sqrt{I_1 + I_2 + \ldots + I_n} = \sqrt{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2} + \ldots + \sqrt{I_n}}$ $(n \geq 1)$.

Chứng minh.

Theo Hệ quả 2.3, ta có $I \subseteq \sqrt{I}$ *và* $J \subseteq \sqrt{J}$. *Suy ra* $I + J \subseteq \sqrt{I} + \sqrt{J}$. *Theo Bổ đề 3.2, ta nhận được* $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subseteq \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$.

Lấy $x \in \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$, khi đó tồn tại n sao cho $x^n \in \sqrt{I} + \sqrt{J}$. Suy ra tồn tại $x_1 \in \sqrt{I}, x_2 \in \sqrt{J}$ để cho $x^n = x_1 + x_2$. Vì $x_1 \in \sqrt{I}$, nên tồn tại n_1 sao cho $x_1^{n_1} \in I$ và $x_2 \in \sqrt{J}$, nên tồn tại n_2 sao cho $x_2^{n_2} \in J$. Ta cần tìm t thỏa mãn $x^t \in I + J$.

Xét khai triển

$$(x_1 + x_2)^{n_1+n_2-1} = \sum_{i=0}^{n_1+n_2+i} C^i_{n_1+n_2-1}\, x_1{}^i x_2{}^{n_1+n_2+i-1}.$$

Trường hợp: $i \geq n_1$. Ta có $x_1^i \in I. \Rightarrow x_1^i {x_2}^{n_1+n_2+i-1} \in I$.

Trường hợp: $i < n_1$. Ta có $i \leq n_1 - 1. \Rightarrow n_1 + n_2 + i - 1 \geq n_1 + n_2 - (n_1 - 1) - 1 = n_2 {x_2}^{n_1+n_2+i-1} \in J$.

$\Rightarrow x_1^i {x_2}^{n_1+n_2+i-1} \in J$. Do vậy ta nhận được $(x_1 + x_2)^{n_1+n_2-1} \in I + J$. Suy ra

$$(x^n)^{n_1+n_2-1} = x^{n(n_1+n_2-1)} \in I + J.$$

Chọn $t = n(n_1 + n_2 - 1)$, ta nhận được $x \in \sqrt{I + J}$. Ta có điều phải chứng minh.

Chứng minh quy nạp theo n

Với $n = 1$, đẳng thức trở thành $\sqrt{\sqrt{I_1}} = \sqrt{I_1}$ (đúng theo Mệnh đề 2.3); với $n = 2$, đẳng thức trở thành $\sqrt{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}} = \sqrt{I_1 + I_2}$ (đúng theo Mệnh đề 3.5 a).

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k\ (k \geq 2)$, ta có

$$\sqrt{I_1 + I_2 + \ldots + I_k} = \sqrt{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2} + \ldots + \sqrt{I_k}}\ .$$

Ta chứng minh đẳng thức cũng đúng với *n=k+1* $(k \geq 2)$, nghĩa là chứng minh

$$\sqrt{I_1 + I_2 + \ldots + I_{k+1}} = \sqrt{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2} + \ldots + \sqrt{I_{k+1}}}\ .$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{I_1 + I_2 + \ldots + I_{k-1} + (I_k + I_{k+1})} &= \sqrt{\sqrt{I_1 + I_2 + \ldots + I_{k-1}} + \sqrt{(I_k + I_{k+1})}} \\ &= \sqrt{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2} + \ldots + \sqrt{I_{k-1}} + \sqrt{I_k} + \sqrt{I_{k+1}}}.\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Mệnh đề 3.6. $a)$ $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

b) $\sqrt{I_1.I_2\ldots I_n} = \sqrt{I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2} \cap \ldots \cap \sqrt{I_n}$.

Chứng minh.

a) Lấy $x \in \sqrt{I \cap J}$ tùy ý. Khi đó tồn tại n sao cho $x^n \in I \cap J$. Suy ra $\begin{cases} x^n \in I \\ x^n \in J \end{cases}$. Do đó $(x^n)^2 \in IJ$, hay $x^{2n} \in IJ. \Rightarrow x \in \sqrt{IJ}$. Do vậy $\sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{IJ}$.

Ta có $IJ \subseteq I$ và $IJ \subseteq J$, nên $IJ \subseteq I \cap J$. Theo Bổ đề 3.2, ta có $\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I \cap J}$.

Vậy ta nhận được $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$.

Lấy $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ tùy ý. $\Rightarrow \begin{cases} x \in \sqrt{I} \\ x \in \sqrt{J} \end{cases}$. Khi đó tồn tại n_1 sao cho $x^{n_1} \in I$ và tồn tại n_2 sao cho $x^{n_2} \in J \Rightarrow x^{n_1}.x^{n_2} \in I$ và $x^{n_1}.x^{n_2} \in J$ (Do *I, J* là các iđêan). $\Rightarrow x^{n_1+n_2} \in I \cap J$. Do vậy $x \in \sqrt{I \cap J}$. Từ đó ta nhận được: $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I \cap J}$.

Do $I \cap J \subseteq I, I \cap J \subseteq J$, nên theo Bổ đề 3.2, ta có $\sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{J}$. $\Rightarrow \sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Từ đó ta nhận được $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Ta có điều phải chứng minh.

b) Chứng minh $\sqrt{I_1.I_2\ldots I_n}=\sqrt{I_1\cap I_2\cap\ldots\cap I_n}$ $(n\geq 2)$.

Ta có $\begin{cases} I_1.I_2\ldots I_n\in I_1\\ I_1.I_2\ldots I_n\in I_2\\ \ldots\\ I_1.I_2\ldots I_n\in I_n\end{cases}$. Suy ra $I_1.I_2\ldots I_n\subseteq I_1\cap I_2\cap\ldots\cap I_n$.

Theo Bổ đề 3.2 ta nhận được $\sqrt{I_1.I_2\ldots I_n}\subseteq\sqrt{I_1\cap I_2\cap\ldots\cap I_n}$. Lấy $x\in I_1\cap I_2\cap\ldots\cap I_n$. Khi đó, tồn tại $n\in N:\ x^n\in I_1\cap I_2\cap\ldots\cap I_n$. Suy ra $x^n\in I_1,\ x^n\in I_2,\ x^n\in I_n$. Do đó $(x^n)^n\in I_1I_2\ldots I_n$. Hay $x^{n^2}\in I_1I_2\ldots I_n$. Dẫn đến $x\in\sqrt{I_1.I_2\ldots I_n}$. Nên ta có $\sqrt{I_1\cap I_2\cap\ldots\cap I_n}\subseteq\sqrt{I_1.I_2\ldots I_n}$.

Vậy $\sqrt{I_1.I_2\ldots I_n}=\sqrt{I_1\cap I_2\cap\ldots\cap I_n}$.

Chứng minh.

$$\sqrt{I_1\cap I_2\cap\ldots\cap I_n}=\sqrt{I_1}\cap\sqrt{I_2}\cap\ldots\cap\sqrt{I_n}\ (n\geq 2).$$

Chứng minh quy nạp theo *n*. Với *n*=2, ta có $\sqrt{I\cap J}=\sqrt{I}\cap\sqrt{J}$ (đúng theo a).

Giả sử đẳng thức đúng với *n= k* $(k\geq 2)$, ta có

$$\sqrt{I_1\cap I_2\cap\ldots\cap I_k}=\sqrt{I_1}\cap\sqrt{I_2}\cap\ldots\cap\sqrt{I_k}.$$

Ta cần chứng minh đẳng thức cũng đúng với *n=k+1* $(k\geq 2)$, tức là chứng minh

$$\sqrt{I_1\cap I_2\cap\ldots\cap I_k\cap I_{k+1}}=\sqrt{I_1}\cap\sqrt{I_2}\cap\ldots\cap\sqrt{I_k}\cap\sqrt{I_{k+1}}.$$

Thật vậy, ta có

$$\sqrt{I_1\cap I_2\cap\ldots\cap I_k\cap I_{k+1}}=\sqrt{I_1\cap I_2\cap\ldots\cap I_k}\cap\sqrt{I_{k+1}}=\sqrt{I_1}\cap\sqrt{I_2}\cap\ldots\cap\sqrt{I_k}\cap\sqrt{I_{k+1}}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Xét trường hợp $(P_i)_{i\in\Gamma}$ là họ tùy ý các iđêan nguyên tố của *R*, Γ là tập chỉ số. Khi đó phép lấy căn được bảo toàn qua phép lấy giao của một họ tùy ý.

Mệnh đề 3.7. Cho $(P_i)_{i\in\Gamma}$ là họ các iđêan nguyên tố của *R*. Khi đó

$$\sqrt{\bigcap_{i\in\Gamma}P_i}=\bigcap_{i\in\Gamma}\sqrt{P_i}.$$

Chứng minh.

Theo Bổ đề 2.4, ta có $\sqrt{P_i}=P_i\ \forall\ i\in\Gamma$ nên để chứng minh mệnh đề ta cần chứng minh $\sqrt{\bigcap_{i\in\Gamma}P_i}=\bigcap_{i\in\Gamma}P_i$. Từ định nghĩa của iđêan căn ta có $\bigcap_{i\in\Gamma}P_i\subseteq\sqrt{\bigcap_{i\in\Gamma}P_i}$. Nên ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{\bigcap_{i \in \Gamma} P_i} \subseteq \bigcap_{i \in \Gamma} P_i$. Lấy $x \in \sqrt{\bigcap_{i \in \Gamma} P_i}$, khi đó tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $x^n \in \bigcap_{i \in \Gamma} P_i$. Suy ra $x^n \in P_i \ \forall\ i \in \Gamma$. Vì P_i là iđêan nguyên tố nên $x \in P_i \ \forall\ i \in \Gamma$ hay $x \in \bigcap_{i \in \Gamma} P_i$.

Vậy mệnh đề được chứng minh.

4. KẾT LUẬN

Ngoài phần giới thiệu, bài báo chia thành hai mục. Mục 2 giới thiệu mối liên hệ giữa I và $\sqrt{I}$. Mục 3 chỉ ra iđêan căn bảo toàn qua phép lấy thương (Bổ đề 3.1, Mệnh đề 3.4), phép nhân, phép giao (Mệnh đề 3.6 và Mệnh đề 3.7) và phép cộng của các iđêan (Mệnh đề 3.5).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Tự Cường (2003), *Giáo trình đại số hiện đại*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội.
[2] Lê Tuấn Hoa (2003), *Đại số máy tính*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội.
[3] Ngô Việt Trung (2012), *Nhập môn đại số giao hoán và Hình học đại số*, Nxb. Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Hà Nội.
[4] Hoàng Xuân Sính (1972), *Đại số đại cương*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.

SOME EXTENDED PROPERTIES OF THE RADICAL OF IDEALS

Le Quang Huy, Hoang Thi Minh Nhan

ABSTRACT

In this paper, we extend previous results of sum, multiplication and intersection of radical of ideals.

Keywords: *Ring, ideal, radical of ideal.*