

BẤT BIẾN CỦA GIỚI HẠN THUẬN QUA PHÉP LẤY THƯƠNG

Phạm Thị Bích Hà¹, Lê Xuân Dũng²

TÓM TẮT

Bài báo chứng minh giới hạn thuận được bảo toàn qua phép lấy thương đối với hệ thuận tổng quát. Đây là sự mở rộng một số kết quả xét trên một số hệ thuận đặc biệt của J. J. Rotman.

Từ khóa: *Giới hạn thuận, A-môđun trái.*

1. GIỚI THIỆU

Cho R là một vành và $\{M_i\}_{i \in I}$ là họ các R -môđun trái (gọi tắt là R -môđun) trên tập sắp thứ tự bộ phận I . Giới hạn thuận của $\{M_i\}_{i \in I}$ luôn tồn tại (xem trong [3], [5], [6]). Ngay sau khi ra đời các khái niệm này có những ứng dụng quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Đại số và Hình học đại số, chẳng hạn đối với Đại số giao hoán trong [4, Section 1] đưa ra cách tính môđun đối đồng địa phương thông qua tính giới hạn thuận. Để phát huy hiệu quả ứng dụng của khái niệm giới hạn thuận trong các lĩnh vực khác, các nhà toán học quan tâm nghiên cứu đến cấu trúc và tính bất biến của giới hạn thuận qua một số phép toán (xem trong [1], [2], [3], [4]).

Mục đích chính của bài báo này là mở rộng các kết quả của phép lấy giới hạn thuận qua phép lấy thương của J. J. Rotman [5, Section 5.2].

Ngoài phần giới thiệu, bài báo chia thành hai mục. Mục 2 xây dựng một hệ thuận mới từ hai hệ thuận ban đầu (Mệnh đề 2.4). Mục 3 trình bày kết quả chính của bài báo về tính bất biến của giới hạn thuận qua phép lấy thương (Định lý 3.4) và khi xét hai hệ thuận đặc biệt ta nhận được các kết quả của J. J. Rotman [5, Section 5.2] (Hệ quả 3.5, Hệ quả 3.6).

2. HỆ THUẬN

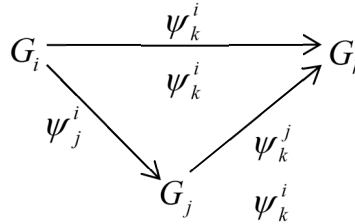
Trong bài viết luôn giả thiết R là vành và M là R -môđun trái (gọi tắt là R -môđun). Giả sử I là một tập sắp thứ tự bộ phận, không mất tính tổng quát ta kí hiệu quan hệ đó là " $\leq$ ". Một tập sắp thứ tự bộ phận I được gọi là một tập định hướng nếu với mọi $i, j \in I$ luôn tồn tại $k \in I$ sao cho $i \leq k$ và $j \leq k$.

Định nghĩa 2.1. Giả sử $\{G_i\}_{i \in I}$ là một họ các R -môđun và I là một tập tựa sắp thứ tự bộ phận. $\{G_i\}_{i \in I}$ gọi là một hệ thuận các R -môđun ứng với tập chỉ số I nếu với mọi $i, j \in I$ sao cho $i \leq j$ luôn tồn tại một đồng cấu $\psi_j^i : G_i \rightarrow G_j$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

^{1, 2} Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

$\psi_i^i : G_i \rightarrow G_i$ là đồng cấu đồng nhất với mọi $i \in I$.

Nếu $k \in I$ sao cho $i \leq j \leq k$ thì $\psi_k^i = \psi_k^j \cdot \psi_j^i$, nghĩa là biểu đồ sau giao hoán:



Hệ thuận được định nghĩa như trên kí hiệu là $G = \{G_i, \psi_j^i\}$.

Ví dụ 2.2. Cho dãy các môđun con của R -môđun M như sau:

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq \dots$$

Khi đó, ta có họ $\{M_i, \psi_j^i (i \leq j)\}_{\mathbb{N}}$ là hệ thuận trên tập định hướng $\mathbb{N}$, trong đó $\psi_j^i : M_i \rightarrow M_j$ là phép nhúng từ M_i vào M_j .

Ví dụ 2.3. Đặt $\Gamma = \{A \mid A \text{ là môđun con của } M\}$. Theo [3, Ví dụ 2.5], ta xem Γ là tập chỉ số trên chính nó và họ $\{A, \phi_A^A, A \subseteq A'\}_{\Gamma}$ là hệ thuận trên tập định hướng Γ .

Giả sử M, N là các R -môđun sao cho tồn tại một đơn cấu các R -môđun $f : N \rightarrow M$. $\{A_i, \phi_j^i (i \leq j)\}_{\mathfrak{M}}$ và $\{B_u, \varphi_v^u (u \leq v)\}_{\mathfrak{N}}$ lần lượt là các hệ thuận các môđun con tương ứng của M và N trên các tập định hướng $\mathfrak{M}$ và $\mathfrak{N}$, trong đó ϕ_j^i và φ_v^u là các phép nhúng. Giả sử hai họ $\mathfrak{A} = \{A_i, \phi_j^i (i \leq j)\}_{\mathfrak{M}}$ và $\mathfrak{B} = \{B_u, \varphi_v^u (u \leq v)\}_{\mathfrak{N}}$ thỏa mãn tính chất sau: với mọi $u \in \mathfrak{N}$ tồn tại $i \in \mathfrak{M}$ sao cho $f(B_u) \subseteq A_i$. Khi đó ta có thể xây dựng được hệ thuận mới từ hai họ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ như sau:

Mệnh đề 2.4. Giả sử ta có hai môđun M, N và hai họ môđun con $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ thỏa mãn các điều kiện như trong lập luận trên. Khi đó

Đặt $\mathfrak{I} = \{(A_i, B_u) \in (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \mid f(B_u) \subseteq A_i\}$ cùng với quan hệ " $\leq$ ", xác định như sau:

$(A_i, B_u) \leq (A_j, B_v)$ nếu $i \leq j$ và $u \leq v$ và I là một tập định hướng.

Tồn tại họ đồng cấu $\theta_{(j,v)}^{(i,u)} : A_i / f(B_u) \rightarrow A_j / f(B_v)$, trong đó $i \leq j, u \leq v$ sao cho họ các phần tử $\{(A_i, B_u), \theta_{(j,v)}^{(i,u)} (i \leq j, u \leq v)\}_{\mathfrak{I}}$ là một hệ thuận trên tập định hướng $\mathfrak{I}$.

Chứng minh.

Với mọi cặp phần tử $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \in \mathfrak{I}$ ($f(B_u) \subseteq A_i, f(B_v) \subseteq A_j$), do $\mathfrak{N}$ là tập định hướng nên tồn tại $w \in \mathfrak{N}$ sao cho $u, v \leq w$. Khi đó tồn tại $k \in \mathfrak{M}$ sao cho $f(B_w) \subseteq A_k$. Vì $\mathfrak{M}$ là tập định hướng nên tồn tại $t \in \mathfrak{M}$ sao cho $i, j, k \leq t$ nên

$f(B_w) \subseteq A_t$. Do vậy $(A_t, B_w) \in \mathfrak{I}$ và thỏa mãn $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \leq (A_t, B_w)$. Vậy $\mathfrak{I}$ là tập định hướng.

Với mọi cặp phần tử $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \in \mathfrak{I}$, $i \leq j$, $u \leq v$ luôn xác định dãy đồng cấu các R -môđun $A_i / f(B_u) \xrightarrow{i_j^{(i,u)}} A_j / f(B_u) \xrightarrow{\pi_{(j,v)}^u} A_j / f(B_v)$,

trong đó $i_j^{(i,u)}(a_i + f(B_u)) = \phi_j^i(a_i) + f(B_u)$ và $\pi_{(j,v)}^u(a_j + f(B_u)) = a_j + f(B_v)$.

Đặt $\theta_{(j,v)}^{(i,u)} = \pi_{(j,v)}^u i_j^{(i,u)}$, $\theta_{(j,v)}^{(i,u)}(a_i + f(B_u)) = \phi_j^i(a_i) + f(B_v)$.

Giả sử $(A_i, B_u) \leq (A_j, B_v) \leq (A_t, B_w)$. Ta có

$$\begin{aligned} \theta_{(t,w)}^{(j,v)} \theta_{(j,v)}^{(i,u)}(a_i + f(B_u)) &= \theta_{(t,w)}^{(j,v)}(\phi_j^i(a_i) + f(B_v)) = \phi_t^j(\phi_j^i(a_i)) + f(B_w) \\ &= \phi_t^i(a_i) + f(B_w) = \theta_{(t,w)}^{(i,u)}(a_i + f(B_u)). \end{aligned}$$

Vậy $\{(A_i, B_u) \in \mathfrak{I}, \theta_{(j,v)}^{(i,u)}(i \leq j, u \leq v)\}_{\mathfrak{I}}$ là một hệ thuận trên tập định hướng $\mathfrak{I}$.

3. PHÉP LẤY THƯỜNG QUA GIỚI HẠN THUẬN

Mục này, trình bày các kết quả chính của bài báo. Trước hết ta nhắc lại khái niệm của giới hạn thuận và cấu trúc của giới hạn thuận khi tập chỉ số là tập định hướng.

Định nghĩa 3.1. ([3, trang 237]) Giả sử G là một hệ thuận các R -môđun ứng với tập chỉ số I . Giới hạn thuận của hệ G , kí hiệu là $\varinjlim_{i \in I} G_i$ hoặc $\varinjlim G_i$ là một R -môđun và một họ đồng cấu các R -môđun $\alpha_i : G_i \rightarrow \varinjlim G_i$ sao cho $\alpha_i = \alpha_j \psi_j^i$, trong đó $i \leq j$, thỏa mãn tính chất: với mọi R -môđun X và họ các đồng cấu $g_i : G_i \rightarrow X$ sao cho $g_i = g_j \psi_j^i$, tồn tại duy nhất một đồng cấu $g : \varinjlim G_i \rightarrow X$ làm cho biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim G_i & \xrightarrow{\quad g \quad} & X \\ \alpha_i \swarrow & & \nearrow g_i \\ & G_i & \\ \alpha_j \swarrow & \downarrow \psi_j^i & \nearrow g_j \\ & G_j & \end{array}$$

Mệnh đề 3.2. ([3, Proposition 5.23 và Lemma 5.30]) Giới hạn thuận của một hệ thuận $\{M_i, \phi_j^i, i \leq j\}_I$ các môđun R -môđun trên một tập chỉ số sắp thứ tự luôn tồn tại và được xác định như sau:

$$\varinjlim M_i = (\oplus M_i) / S,$$

trong đó

$$S = \{\lambda_j \phi_j^i(m_i) - \lambda_i(m_i) \mid i, j \in I, i \leq j, m_i \in M_i\}$$

và $\lambda_i : M_i \rightarrow \oplus M_i$ là đồng cấu nhúng thứ i .

Hơn nữa, nếu I là một tập định hướng, ta có

Mỗi phần tử của $\varinjlim M_i$ luôn viết được dưới dạng $\lambda_i(m_i) + S$.

$\lambda_i(m_i) + S = 0$ khi và chỉ khi tồn tại $t \in I$ sao cho $i \leq t$ và $\phi_t^i(m_i) = 0$.

Nhận xét. Theo Mệnh đề 2.4, ta có ba họ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ và $\mathfrak{I}$ là các hệ thuận, kết hợp với mệnh đề trên ta thấy giới hạn thuận của các họ này tồn tại và được xác định như sau:

$$\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i = \{\alpha_i(a_i) + S_1 \mid i \in \mathfrak{M}, a_i \in A_i\},$$

trong đó

$$\alpha_i : A_i \rightarrow \oplus_{i \in \mathfrak{M}} A_i, \quad \alpha_i(a_i) = (\dots, 0, a_i, 0, \dots) \text{ và}$$

$$S_1 = \{\alpha_j \phi_j^i(a_i) - \alpha_i(a_i) \mid i \in \mathfrak{M}, a_i \in A_i, i \leq j\}.$$

$$\varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u = \{\beta_u(b_u) + S_2 \mid u \in \mathfrak{N}, b_u \in B_u\},$$

trong đó

$$\beta_u : B_u \rightarrow \oplus_{u \in \mathfrak{N}} B_u, \quad \beta_u(b_u) = (\dots, 0, b_u, 0, \dots) \text{ và}$$

$$S_2 = \{\beta_v \phi_v^u(b_u) - \beta_u(b_u) \mid u \in \mathfrak{N}, b_u \in B_u, u \leq v\}.$$

$$\varinjlim_{(A_i, B_u) \in \mathfrak{J}} \frac{A_i}{f(B_u)} = \{\gamma_{(i,u)}(a_i + f(B_u)) + S \mid (A_i, B_u) \in \mathfrak{J}, a_i \in A_i\},$$

trong đó

$$\gamma_{(i,u)} : \frac{A_i}{f(B_u)} \rightarrow \oplus_{(A_i, B_u) \in \mathfrak{J}} \frac{A_i}{f(B_u)}, \quad \gamma_{(i,u)}(a_i + f(B_u)) = (0, \dots, a_i + f(B_u), \dots, 0) \text{ và}$$

$$S = \{\gamma_{(j,v)} \theta_{(j,v)}^{(i,u)}(a_i + f(B_u)) - \gamma_{(i,u)}(a_i + f(B_u)) \mid (A_i, B_u) \in \mathfrak{J}, a_i \in A_i, (A_i, B_u) \leq (A_j, B_v)\}.$$

Nếu $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ thỏa mãn thêm điều kiện với mọi $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \in \mathfrak{I}$, $(A_i, B_u) \leq (A_j, B_v)$ thỏa mãn $\phi_j^i \cdot f|_{B_u} = f|_{B_v} \cdot \phi_v^u$ ta có thể xây dựng được một đơn cấu từ $\varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u$ vào $\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i$ như trong bổ đề sau:

Bổ đề 3.3. Cho hai họ $\mathfrak{A} = \{A_i, \phi_j^i (i \leq j)\}_{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{B} = \{B_u, \phi_v^u (u \leq v)\}_{\mathfrak{N}}$, tập $\mathfrak{I}$ được xác định như nêu trong Mệnh đề 2.4 và với mọi $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \in \mathfrak{I}$ sao cho $(A_i, B_u) \leq (A_j, B_v)$ thỏa mãn $\phi_j^i \cdot f|_{B_u} = f|_{B_v} \cdot \phi_v^u$. Khi đó tồn tại một đơn cấu từ $\varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u$ vào $\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i$. Hơn nữa,

$$\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} B_u \cong \{\alpha_i(a_i) + S_1 \mid \exists u \in \mathfrak{N}, f(B_u) \subseteq A_i, a_i = f(b_u)\}.$$

Chứng minh:

Lấy $\beta_u(b_u) + S_2 \in \varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u$, tồn tại $i \in \mathfrak{M}$ sao cho $f(B_u) \subseteq A_i$, để cho gọn ta đặt $a_i = f(b_u)$. Xét tương ứng

$$g : \varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u \rightarrow \varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i, g(\beta_u(b_u) + S_2) = \alpha_i(a_i) + S_1$$

Trước hết ta cần chứng minh g là một ánh xạ. Lấy $\beta_u(b_u) + S_2 = \beta_v(b_v) + S_2$, hay $\beta_u(b_u) - \beta_v(b_v) + S_2 = 0$. Tồn tại $i, j \in \mathfrak{M}$ sao cho

$$g(\beta_u(b_u) + S_2) = \alpha_i(a_i) + S_1, g(\beta_v(b_v) + S_2) = \alpha_j(a_j) + S_1,$$

trong đó $a_i = f(b_u), a_j = f(b_v)$. Theo Mệnh đề 2.4 (i), tồn tại $(A_i, B_w) \in \mathfrak{I}$ và thỏa mãn $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \leq (A_i, B_w)$. Đặt $b_w = \varphi_w^u(b_u) - \varphi_w^v(b_v)$, dẫn đến $\beta_w(b_w) = \beta_u(b_u) - \beta_v(b_v)$, do đó $\beta_u(b_u) - \beta_v(b_v) + S_2 = \beta_w(b_w) + S_2 = 0$. Theo Mệnh đề 3.2 (ii), tồn tại $z \in \mathfrak{N}, w \leq z$ sao cho $\varphi_z^w(b_w) = 0$ hay $\varphi_z^u(b_u) = \varphi_z^v(b_v)$.

Theo tính chất của hai họ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, tồn tại $k \in \mathfrak{M}$ sao cho $f(B_z) \subseteq A_k$. Theo Mệnh đề 2.4 (i), tồn tại $(A_p, B_q) \in \mathfrak{I}$ và thỏa mãn $(A_i, B_w), (A_k, B_z) \leq (A_p, B_q)$. Do vậy từ $\varphi_z^u(b_u) = \varphi_z^v(b_v)$ ta có $\varphi_q^u(b_u) = \varphi_q^v(b_v)$ suy ra $f(\varphi_q^u(b_u)) = f(\varphi_q^v(b_v))$. Vì $(A_i, B_u) \leq (A_p, B_q)$ và $(A_j, B_v) \leq (A_p, B_q)$, nên $f(\varphi_q^u(b_u)) = \phi_p^i(f(b_u)) = \phi_p^i(a_i)$ và $f(\varphi_q^v(b_v)) = \phi_p^j(f(b_v)) = \phi_p^j(a_j)$. Dẫn đến $\phi_p^i(a_i) = \phi_p^j(a_j)$

Đặt $a_t = \phi_t^i(a_i) - \phi_t^j(a_j)$, dẫn đến $\alpha_t(a_t) = \alpha_i(a_i) - \alpha_j(a_j)$, do đó $\alpha_i(a_i) - \alpha_j(a_j) + S_1 = \alpha_t(a_t) + S_1$.

Ta có $\phi_p^t(a_t) = \phi_p^t \phi_t^i(a_i) - \phi_p^t \phi_t^j(a_j) = \phi_p^i(a_i) - \phi_p^j(a_j) = 0$. Theo Mệnh đề 3.2 (ii) ta có $\alpha_i(a_i) - \alpha_j(a_j) + S_1 = 0$ hay $\alpha_i(a_i) + S_1 = \alpha_j(a_j) + S_1$. Vậy g là một ánh xạ.

Lấy $\beta_u(b_u) + S_2, \beta_v(b_v) + S_2 \in \varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u$. Tồn tại $i, j \in \mathfrak{M}$ sao cho

$$g(\beta_u(b_u) + S_2) = \alpha_i(a_i) + S_1, g(\beta_v(b_v) + S_2) = \alpha_j(a_j) + S_1,$$

trong đó $a_i = f(b_u), a_j = f(b_v)$. Khi đó ta có

$$g(\beta_u(b_u) + S_2) + g(\beta_v(b_v) + S_2) = \alpha_i(a_i) + \alpha_j(a_j) + S_1,$$

Theo Mệnh đề 2.4 (i), tồn tại $(A_t, B_w) \in \mathfrak{I}$ và thỏa mãn $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \leq (A_t, B_w)$. Đặt

$$b_w = \varphi_w^u(b_u) + \varphi_w^v(b_v) \in B_w,$$

dẫn đến $\beta_w(b_w) = \beta_u(b_u) + \beta_v(b_v)$, $\beta_u(b_u) + \beta_v(b_v) + S_2 = \beta_w(b_w) + S_2 = 0$.

Do vậy $g(\beta_u(b_u) + \beta_v(b_v) + S_2) = g(\beta_w(b_w) + S_2) = \alpha_t(a_t) + S_1$, trong đó $a_t = f(b_w)$.

Vì vậy $a_t = f(b_w) = f(\varphi_w^u(b_u) + \varphi_w^v(b_v)) = \varphi_t^i f(b_u) + \varphi_t^j f(b_v) = \varphi_t^i(a_i) + \varphi_t^j(a_j)$.

Từ đó ta nhận được $\alpha_i(a_i) + \alpha_j(a_j) + S_1 = \alpha_t(a_t) + S_1 = g(\beta_u(b_u) + \beta_v(b_v) + S_2)$.

Giả sử $g(\beta_u(b_u) + S_2) = \alpha_i(a_i) + S_1 = 0$. Theo Mệnh đề 3.2 (ii) tồn tại $k \in \mathfrak{M}, i \leq k$ sao cho $\phi_k^i(a_i) = 0$. Ta lại có $\phi_k^i(a_i) = \phi_k^i(f(b_u)) = f(\phi_u^i(b_u))$. Vì f là đơn cấu nên $\phi_u^i(b_u) = 0$, theo Mệnh đề 3.2 (ii) ta nhận được $\beta_u(b_u) + S_2 = 0$. Vậy g là đơn cấu. $\square$

Theo kết quả trên, ta có thể xem $\varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u$ là môđun con của $\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i$, do đó không mất tính tổng quát ta có thể viết $\frac{\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i}{\varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u}$ thay cho môđun thương $\frac{\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i}{g(\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i)}$ và $\frac{A_i}{B_u}$ thay cho $\frac{A_i}{f(B_u)}$. Từ đó ta có thể phát biểu kết quả chính của bài báo như sau:

Định lý 3.4. Cho hai họ $\mathfrak{A} = \{A_i, \phi_j^i, (i \leq j)\}_{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{B} = \{B_u, \phi_v^u, (u \leq v)\}_{\mathfrak{N}}$, tập $\mathfrak{J}$ được xác định như nêu trong Bổ đề 2.4 và với mọi $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \in \mathfrak{J}$ sao cho $(A_i, B_u) \leq (A_j, B_v)$ thỏa mãn $\phi_j^i f|_{B_u} = f|_{B_v} \phi_v^u$. Khi đó $\varinjlim_{(A_i, B_u) \in \mathfrak{J}} \frac{A_i}{B_u} \cong \frac{\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i}{\varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u}$.

Chứng minh.

Xét tương ứng

$$\lambda_{(i,u)} : \frac{A_i}{f(B_u)} \rightarrow \frac{\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i}{\varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u}, \lambda_{(i,u)}(a_i + f(B_u)) = (\alpha_i(a_i) + S_1) + \varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u.$$

Ta chỉ cần chứng tỏ tương ứng trên là một ánh xạ.

Thật vậy, giả sử $a_i + f(B_u) = b_i + f(B_u)$ trong đó $a_i, b_i \in A_i$ suy ra $a_i - b_i \in f(B_u)$.

Do vậy $(\alpha_i(a_i - b_i) + S_1) + \varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u = 0$.

Từ đó ta nhận được $(\alpha_i(a_i) + S_1) + \varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u = (\alpha_i(b_i) + S_1) + \varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u$ hay $\lambda_{(i,u)}(a_i + f(B_u)) = \lambda_{(i,u)}(b_i + f(B_u))$. Do đó $\lambda_{(i,u)}$ là ánh xạ.

Với mọi $(A_i, B_u) \leq (A_j, B_v)$, ta có biểu đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccc} A_i / B_u & \xrightarrow{\lambda_{(i,u)}} & \frac{\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i}{\varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u} \\ & \searrow \theta_{(j,v)}^{(i,u)} & \nearrow \lambda_{(j,v)} \\ & A_j / B_v & \end{array} \quad \begin{array}{c} \psi_k^i \\ \psi_k^i \end{array}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} \lambda_{(j,v)} \theta_{(j,v)}^{(i,u)}(a_i + f(B_u)) &= \lambda_{(j,v)}(a_i + f(B_u)) = (\alpha_j(a_i) + S_1) + \varinjlim_{v \in \mathfrak{N}} B_v \\ &= (\alpha_j(\phi_j^i(a_i)) + S_1) + \varinjlim_{v \in \mathfrak{N}} B_v = (\alpha_i(a_i) + S_1) + \varinjlim_{v \in \mathfrak{N}} B_v = \lambda_{(i,u)} a_i + f(B_u). \end{aligned}$$

Xét biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccc}
 \varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i & \xrightarrow{\quad h \quad} & X \\
 \varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u & \xrightarrow{\quad \quad} & \\
 \lambda_{(i,u)} \swarrow & & \nearrow \eta_{(i,u)} \\
 & A_i / B_u & \\
 \lambda_{(j,v)} \swarrow & \downarrow \theta_{(j,v)}^{(i,u)} & \nearrow \eta_{(j,v)} \\
 & A_j / B_v &
 \end{array}$$

Lấy $\alpha_i(a_i) + S_1 \in \varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i$. Với mỗi $v \in \mathfrak{N}$ luôn tồn tại $t \in \mathfrak{M}$ cho $f(B_v) \subseteq A_t$. Vì $\mathfrak{M}$ là tập định hướng nên luôn tồn tại $k \in \mathfrak{M}$ sao cho $i, t \leq k$. Khi đó $(A_k, B_v) \in \mathfrak{J}$ nên $\gamma_{(k,v)}(a_i + f(B_v)) + S \in \varinjlim_{(A_i, B_v) \in \mathfrak{J}} \frac{A_i}{B_v}$.

Vì vậy ta xác định được tương ứng sau:

$$h: \varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i \rightarrow \varinjlim_{(A_i, B_u) \in \mathfrak{J}} \frac{A_i}{B_u}, h(\alpha_i(a_i) + S_1) = \gamma_{(k,v)}(\phi_k^i(a_i) + f(B_v)) + S.$$

Giả sử $\alpha_i(a_i) + S_1 = \alpha_j(a_j) + S_1$ hay $\alpha_i(a_i) - \alpha_j(a_j) + S_1 = 0$. Khi đó tồn tại (t, w) sao cho $h(\alpha_j(a_j) + S_1) = \gamma_{(t,w)}(\phi_t^j(a_j) + f(B_w)) + S$.

Giả sử $(k, v), (t, w) \leq (\varepsilon, \delta)$. Đặt $a_\varepsilon = \phi_\varepsilon^i(a_i) - \phi_\varepsilon^j(a_j)$ ta có

$$a_\varepsilon + f(B_\delta) = \theta_{(\varepsilon, \delta)}^{(k, v)}(\phi_k^i(a_i) + f(B_v)) - \theta_{(\varepsilon, \delta)}^{(t, w)}(\phi_t^j(a_j) + f(B_w)).$$

Khi đó $\gamma_{(\varepsilon, \delta)}(a_\varepsilon + f(B_\delta)) = \gamma_{(k, v)}(\phi_k^i(a_i) + f(B_v)) - \gamma_{(t, w)}(\phi_t^j(a_j) + f(B_w))$

Đặt $a_t = \phi_t^i(a_i) - \phi_t^j(a_j)$ suy ra $\alpha_t(a_t) = \alpha_i(a_i) - \alpha_j(a_j)$. Theo Mệnh đề 3.2 (ii) tồn tại $p \in \mathfrak{M}, t \leq p$ sao cho $\phi_p^i(\alpha_t(a_t)) = 0$ hay $\phi_p^i(a_i) - \phi_p^j(a_j) = 0$.

Tồn tại $q \in \mathfrak{M}, p \leq q, z \in \mathfrak{N}$ sao cho $(A_t, B_w), (A_\varepsilon, B_\delta) \leq (A_q, B_z) \in \mathfrak{J}$. Khi đó

$$\theta_{(q, z)}^{(\varepsilon, \delta)}(a_\varepsilon + f(B_\delta)) = \theta_{(q, z)}^{(\varepsilon, \delta)}(\phi_\varepsilon^i(a_i) - \phi_\varepsilon^j(a_j) + f(B_\delta)) = \phi_p^i(a_i) - \phi_p^j(a_j) + f(B_z) = 0$$

Vậy h là một ánh xạ. Ngoài ra dễ dàng thấy h là một toàn cấu. Khi đó ta có

$$\varinjlim_{(A_i, B_u) \in \mathfrak{J}} \frac{A_i}{B_u} \cong \frac{\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i}{\ker(h)}.$$

Lập luận tương tự trên, giả sử $h(\alpha_i(a_i) + S_1) = 0$ ta có $\gamma_{(k,v)}(\phi_k^i(a_i) + f(B_v)) + S = 0$.

Theo Mệnh đề 3.2 (ii), tồn tại $(A_t, B_z) \in \mathfrak{J}$, $(A_k, B_v) \leq (A_t, B_z)$ sao cho $\theta_{(t, z)}^{(k, v)}(\phi_k^i(a_i) + f(B_v)) = 0$ hay $\phi_t^i(a_i) + f(B_z) = 0$, như vậy $\phi_t^i(a_i) \in f(B_z)$. Do vậy $\ker(h) = \varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u$.

Hệ quả 3.5. ([5, Corollary 5.38]) Cho A là R -môđun trái, $\{A_i, \phi_j^i, (i \leq j)\}_I$ là một hệ thuận các môđun con của A trên tập định hướng I . Khi đó ta có:

$$\text{i) } \varinjlim_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

$$\text{ii) } \varinjlim_{i \in I} A / A_i = A / \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Chứng minh.

(i) Áp dụng Định lý 3.4, cho hai môđun $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ và $B = 0$ và cho hai hệ thuận các môđun con của A, B là $\mathfrak{A} = \{A_i, \phi_j^i, (i \leq j)\}_I, \mathfrak{B} = \{B_i = 0, \phi_j^i, (i \leq j)\}_I$. Kết hợp với $\varinjlim_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A_i = A, \varinjlim_{u \in I} B_u = \bigcup_{u \in I} B_u = 0$ ta nhận kết quả (i) của Bổ đề.

(ii) Áp dụng Định lý 3.4, cho hai môđun $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ và $B = 0$ và cho hai hệ thuận các môđun con của A và B là $\mathfrak{A} = \{B_i = A, \phi_j^i, (i \leq j)\}_u, \mathfrak{B} = \{A_i = 0, \phi_j^i, (i \leq j)\}_I$. Kết hợp với $\varinjlim_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} B_i = A, \varinjlim_{u \in I} A_i = \bigcup_{u \in I} A_i$ ta nhận được kết quả của (ii) của bổ đề.

Hệ quả 3.6. ([5, Proposition 5.37]) Cho B là môđun con của A và hai hệ thuận các môđun con của A và B lần lượt là $\mathfrak{A} = \{A_i, \phi_j^i, (i \leq j)\}_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{B} = \{B_u, \phi_v^u, (u \leq v)\}_{\mathfrak{N}}$ thỏa mãn với mọi $B_u \in \mathfrak{B}$ luôn tồn tại $A_i \in \mathfrak{A}$ sao cho $B_u \subseteq A_i$ và $A = \bigcup_{i \in \mathfrak{M}} A_i, B = \bigcup_{u \in \mathfrak{N}} B_u$. Trên tập $\mathfrak{J} = \{(A, B) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \mid B \subseteq A\}$ trang bị một quan hệ thứ tự bộ phận “ $\leq$ ” như sau: với mọi $(A_i, B_u), (A_j, B_v) \in \mathfrak{J}$ thì $(A_i, B_u) \leq (A_j, B_v)$ khi và chỉ khi $A_i \subseteq A_j$ và $B_u \subseteq B_v$. Khi đó

$$\varinjlim_{(A_i, B_u) \in \mathfrak{J}} (A_i / B_u) \cong A / B.$$

Chứng minh.

Áp dụng Định lý 3.4, cho hai môđun A, B và cho hai hệ thuận các môđun con của A, B là $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. Kết hợp với $\varinjlim_{i \in \mathfrak{M}} A_i = \bigcup_{i \in \mathfrak{M}} A_i = A$ và $\varinjlim_{u \in \mathfrak{N}} B_u = \bigcup_{u \in \mathfrak{N}} B_u = B$ ta nhận kết quả của bổ đề.

4. KẾT LUẬN

Ngoài phần giới thiệu, bài báo chia thành hai mục. Mục 2 xây dựng một hệ thuận mới từ hai hệ thuận ban đầu (Mệnh đề 2.4). Mục 3 trình bày kết quả chính của bài báo về tính bất biến của giới hạn thuận qua phép lấy thương (Định lý 3.4) và khi xét hai hệ thuận đặc biệt ta nhận được các kết quả của J. J. Rotman [5, Section 5.2] (Hệ quả 3.5, Hệ quả 3.6).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Lê Quang Huy (2016), *Bảo toàn giới hạn qua lấy tổng trực tiếp*, Tạp chí khoa học, Trường Đại học Hồng Đức, Số 29, 6- 2016.
- [2] L. Angeleri-Hügel, J. Trlifaj (2004), *Direct limits of modules of finite projective dimension*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 236, Dekker, New York, pp. 27-44.
- [3] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald (1969), *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley.
- [4] M. Brodmann and R.Y. Sharp (1998), *Local cohomology - an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge University Press.
- [5] J. J. Rotman (2000), *An introduction to homological algebra*, Academic Press.
- [6] C. A. Weibel (1997), *An introduction to homological algebra*, Cambridge University press.

QUOTIENT MODULES PRESERVES DIRECT LIMITS

Pham Thi Bich Ha, Le Xuan Dung

ABSTRACT

In this paper, we show that quotient of left A -modules preserves direct limits. These results extend previous results of J. J. Rotman.

Keywords: *Direct limits, left A -modules.*